M. CARAMIA, S. GIORDANI, F. GUERRIERO, R. MUSMANNO, D. PACCIARELLI

RICERCA OPERATIVA

Isedi

Esercizi proposti nel Cap. 6 - Soluzioni

Esercizio 6.1

La soluzione ottima è il vertice $v^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, di valore $z(v^*) = 9$, vedi Figura 1 in fondo al file.

Esercizio 6.2

Il poliedro è illimitato superiormente, in Figura 2 (in fondo al file) è evidenziata una direzione $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ di costo positivo.

Esercizio 6.3

La soluzione ottima è il vertice $v^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, di valore $z(v^*) = 0$, vedi Figura 3 in fondo al file.

Esercizio 6.4

- La soluzione ottima è il vertice $v^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, di valore $z(v^*) = 15$, vedi Figura 4 in fondo al file.
- Modificando il primo vincolo la soluzione ottima trasla orizzontalmente per $0 \leq k \leq 1$, e poi lungo la retta $2x_1 + x_2 = 12$ per $1 \leq k \leq {}^{22}/_{3}$. Per valori maggiori, il vincolo $x_1 + x_2 \leq 5 + k$ non è più attivo e quindi la soluzione ottima non cambia più, vedi Figura 4bis in fondo al file.

Esercizio 6.5

La forma standard richiede l'introduzione di due variabili di scarto x_4 e x_5:

$$\min z(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3^-$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3^- - x_5 = -3 \\ x_1, x_2, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 6.6

La condizione di illimitatezza è espressa dal Lemma 6.1, il quale afferma che se il poliedro è non vuoto ed esiste un vettore d direzione del poliedro, cioè soluzione del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2d_1 - d_2 - d_3 + 2d_4 = 0 \\ 3d_1 + d_2 - 2d_3 + d_4 = 0 \\ d_1 - 2d_2 + 3d_3 - d_4 = 0 \\ d_1, d_2, d_3, d_4 \geq 0 \end{cases}$$

tale che $c^T d = 2d_1 - 3d_2 + d_3 - d_4 < 0$ allora il problema è illimitato inferiormente. Risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2d_1 - d_2 - d_3 + 2d_4 = 0 \\ 3d_1 + d_2 - 2d_3 + d_4 = 0 \\ d_1 - 2d_2 + 3d_3 - d_4 = 0 \end{cases}$$

si ottiene la soluzione $d_1 = 0$, $d_2 = d_3 = d_4$, che è ammissibile se $d \geq 0$ e fornisce l'unica direzione del poliedro ($\|d\| = 1$): $d = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^T$. Poiché $c^T d = 2d_1 - 3d_2 + d_3 - d_4 = -\sqrt{3} < 0$ si conclude che il problema di PL è illimitato inferiormente.

Esercizio 6.7

- L'insieme $B = \{1,2,3\}$ corrisponde alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ che ha determinante -2 e quindi è una base. L'inversa è $\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, il vettore $A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 33/4 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$, quindi B è un insieme di indici di base ammissibile.
- L'insieme $\bar{B} = \{1,2,4\}$ corrisponde alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ che ha determinante $det\bar{B} = 0$ e quindi non è una base. Quindi $\bar{B}$ non è un insieme di indici ammissibili di base.

Esercizio 6.8

Problema in forma standard:

$$\min z(x) = -4x_1 - x_2^-$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2^- - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2^- + x_4 = 2 \\ x_1, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Se $B^{(1)} = \{3,4\}$ si ha il problema in forma canonica rispetto a $B^{(1)}$:

$$\min z(x) = -4x_1 - x_2^-$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2^- + x_3 = -5 \\ 3x_1 - x_2^- + x_4 = 2 \\ x_1, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che $B^{(1)}$ è un insieme di indici di base non ammissibile;

Se $B^{(2)} = \{1,2\}$ si ha il problema in forma canonica rispetto a $B^{(2)}$:

$$\min z(x) = -\frac{7}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{41}{4}$$
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4} \\ x_2^- - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{13}{4} \\ x_1, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che $B^{(2)}$ è un insieme di indici di base ammissibile ma non ottimo. Poiché $\bar{c}_3 < 0$ e $\bar{A}_3 \leq 0$ segue dal Teorema 6.3 che il problema dato è illimitato inferiormente, e quindi non esiste un insieme di indici di base corrispondente a una soluzione ottima del problema. Non è quindi necessario provare gli altri 4 insiemi di indici $B^{(3)} = \{1,3\}$, $B^{(4)} = \{1,4\}$, $B^{(5)} = \{2,3\}$, $B^{(6)} = \{2,4\}$.

Utilizzando invece la funzione obiettivo $\min z(x) = x_1 - 2x_2$, che in forma standard diventa $\min z(x) = x_1 + 2x_2^-$, e che portata in forma canonica rispetto a $B^{(2)}$ diventa: $\min z(x) = \frac{33}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$, si evidenzia l'ottimalità di questo insieme di indici di base. Una soluzione ottima del problema (in effetti l'unica) è $x^* = [x_1\ \ x_2^-\ \ x_3\ \ x_4]^T = \begin{bmatrix}\frac{7}{4} & \frac{13}{4} & 0 & 0\end{bmatrix}^T$.

Esercizio 6.9

Poiché il problema dato è di pianificazione della produzione, le variabili rappresentano i livelli di produzione, cioè il numero x_i di pezzi prodotti in un anno per il cliente $i = 1, \dots, 4$. L'obiettivo è massimizzare il profitto. Una formulazione del problema (in un anno le macchine possono lavorare 120000 min e l'operaio 96000 min) è la seguente:

$$\max z(x) = 120x_1 + 160x_2 + 260x_3 + 80x_4$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 7x_4 \le 120000 \\ 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 \le 120000 \\ 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 15x_4 \le 96000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Che in forma standard diventa:

$$\min z(x) = -120x_1 - 160x_2 - 260x_3 - 80x_4$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 7x_4 + x_5 = 120000 \\ 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 + x_6 = 120000 \\ 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 15x_4 + x_7 = 96000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

La decisione del responsabile aziendale di non produrre per i clienti 2 e 4 corrisponde a ipotizzare l'esistenza di una soluzione ottima in cui x_2 e x_4 sono fuori base. La decisione di utilizzare tutte le ore disponibili corrisponde a considerare fuori base anche x_7. La decisione è appropriata se esiste una base ottima con queste caratteristiche. Si devono quindi analizzare quattro basi corrispondenti agli insiemi di indici $B^{(1)} = \{1,3,5\}$, $B^{(2)} = \{1,3,6\}$, $B^{(3)} = \{1,5,6\}$, $B^{(4)} = \{3,5,6\}$. Dal Teorema 6.2 si ha che $B^{(4)} = \{3,5,6\}$ risulta una soluzione ottima, in quanto:

$$A_{B^{(4)}} = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{B^{(4)}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^{1}/_{12} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -{}^{10}/_{12} \end{bmatrix},\ c_{B^{(4)}}^T A_{B^{(4)}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -{}^{260}/_{12} \end{bmatrix} = y^T$$

$$N^{(4)} = \{1,2,4,7\},\ \bar{c}_{N^{(4)}}^T = c_{N^{(4)}}^T - y^T A_{N^{(4)}} = \begin{bmatrix} 10 & 35 & 245 & {}^{65}/_{3} \end{bmatrix} \ge 0.$$

SBA ottima: $$x_{B^{(4)}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = A_{B^{(4)}}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^{1}/_{12} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -{}^{10}/_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120000 \\ 120000 \\ 96000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 24000 \\ 40000 \end{bmatrix},\ x_{N^{(4)}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la scelta ottimale è di produrre 10000 pezzi per il cliente 3, utilizzando tutte le ore uomo disponibili.

Esercizio 6.10

- P è il poliedro, non il problema. Quindi l'affermazione non è corretta. Un'affermazione corretta sarebbe stata: "se esiste un punto $x^* \in P$ tale che, per ogni $x \in P$, si ha che $z(x^*) \le z(x)$, allora il problema $\min\{c^T x: Ax = b; x \ge 0\}$ ammette soluzione ottima x^*";
- corretta;

- l'affermazione non è corretta, ad esempio per un problema illimitato inferiormente non esiste un punto $x^* \in P$ ma il problema non è inammissibile;
- corretta;
- corretta;
- l'affermazione non è corretta, il problema è illimitato inferiormente se esiste una direzione d del poliedro di costo negativo, ovvero tale che $Ad = 0; d \geq 0; c^T d < 0$.
- l'affermazione non è corretta, l'esistenza di una SBA ottima non esclude l'esistenza di soluzioni ottime non SBA, che infatti possono esistere;
- l'affermazione non è corretta, un'affermazione corretta è: "il problema ammette soluzione ottima se $P \neq \emptyset$ e per tutte le direzioni $d \in P$ si ha $c^T d \geq 0$";
- corretta;
- l'affermazione non è corretta, le SBA degeneri hanno più di $n - m$ variabili con valore pari a 0;
- corretta (vedi Corollario 6.1).

Esercizio 6.11

Problema in forma standard:

$$\min z(x) = -40x_1 - 30x_2 - 50x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 30 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Il punto $\bar{x}$ nel problema in forma standard corrisponde alla soluzione $\bar{x} = [10 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 10]^T$, che è una SBA in quanto agli indici di base $B = \{1,3,6\}$ corrisponde la matrice di base:

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ che ha $\det A_B = 5 \neq 0$ e che quindi è una base ammissibile. $\bar{x}$ è anche una soluzione ottima del problema, come si può verificare applicando la condizione del Teorema 6.2: $\bar{c}_N^T \geq 0$. Infatti:

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix}, c_{B^{(4)}}^T A_{B^{(4)}}^{-1} = [-22 \quad -6 \quad 0] = y^T$$

$N = \{2,4,5\}$, $\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T A_N = [20 \quad 22 \quad 6] \geq 0$.

Esercizio 6.12

Problema in forma standard:

$$\min z(x) = 4x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

il punto corrispondente a $\bar{x} = [0 \;\; 2 \;\; 0]^T$ in (P') è $[0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 4]^T$ ed è una SBA (degenere) in quanto le colonne A_2 e A_4 sono linearmente indipendenti.
Per verificare l'ottimalità della soluzione è necessario associare una base a $\bar{x}$. La SBA degenere può essere associata a più basi, nello specifico quelle corrispondenti agli insiemi di indici $B^{(1)} = \{2,5,1\}$, $B^{(2)} = \{2,5,3\}$ e $B^{(3)} = \{2,5,4\}$. Pertanto è necessario verificare le condizioni $\bar{c}_N^T \geq 0$ per tutte e tre le combinazioni, arrestandosi eventualmente alla prima verificata.
Per $B^{(3)} = \{2,5,4\}$ la condizione di ottimo è verificata. Infatti:

$A_{B^{(3)}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{B^{(3)}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, c_{B^{(3)}}^T A_{B^{(3)}}^{-1} = [1 \quad 0] = y^T$
$N^{(3)} = \{1,3\}$, $\bar{c}_{N^{(3)}}^T = c_{N^{(3)}}^T - y^T A_{N^{(3)}} = [3 \quad 1] \geq 0$.

Esercizio 6.13

- la soluzione ottima per via grafica è il punto $x^* = [0 \quad 5/4]^T$, cui corrisponde l'ottimo $z(x^*) = 25/4$;
- il punto $\bar{x} = [5 \quad 0]^T$ non potrà mai essere una soluzione ottima del problema in quanto viola il secondo vincolo e pertanto non è una soluzione ammissibile;
- i punti $\bar{x} = [1 \quad 6]^T$ e $\tilde{x} = [2 \quad 2]^T$ non potranno mai essere soluzioni ottime del problema in quanto non sono soluzioni ammissibili: $\bar{x}$ viola il terzo vincolo, $\tilde{x}$ viola il secondo.

Esercizio 6.14

- Allo scopo si può utilizzare il Lemma 5.1. Quindi $\bar{x} = [0 \ 4 \ 2 \ 0 \ 0]^T$ non è SBA in quanto le colonne A_2 e A_3 sono linearmente dipendenti, infatti $\det[A_2 \ \ A_3] = 0$, $\tilde{x} = [0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ è una SBA (degenere) in quanto l'unica colonna A_2 costituisce un insieme indipendente, $\hat{x} = [2 \ 0 \ 0 \ 6 \ 0]^T$ è SBA in quanto le colonne A_1 e A_4 sono linearmente indipendenti, infatti $\det[A_1 \ \ A_4] = 3 \neq 0$;
- $\tilde{x}$ è una SBA degenere. Un insieme di indici di base si può ottenere aggiungendo alla colonna A_2 (necessariamente in base) una colonna da essa linearmente indipendente, quindi A_1 o A_4 o A_5. Si ottengono tre basi associate a $\tilde{x}$, individuate dagli insiemi di indici $B^{(1)} = \{1,2\}$, $B^{(2)} = \{2,4\}$, $B^{(3)} = \{2,5\}$. La verifica delle condizioni di ottimo di $\tilde{x}$ con il Teorema 6.2 va quindi eseguita su tutte e tre le basi, eventualmente fermandosi alla prima verifica positiva. Allo scopo è necessario portare il problema in forma standard:

$$\min z(x) = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

  e verificare, per ciascuna base, la condizione $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$. Per $B^{(1)}$ si ha: $N^{(1)} = \{3,4,5\}$,
$$\bar{c}_{N^{(1)}}^T = [2 \ 0 \ 0] - [-1 \quad -2] \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -4/3 \end{bmatrix}$$
  Quindi $B^{(1)}$ non soddisfa le condizioni di ottimo. Per $B^{(2)}$ si ha: $N^{(2)} = \{1,3,5\}$,
$$\bar{c}_{N^{(1)}}^T = [-1 \ 2 \ 0] - [-2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad -2]$$
  Quindi $B^{(2)}$ non soddisfa le condizioni di ottimo. Per $B^{(3)}$ si ha: $N^{(3)} = \{1,3,4\}$,
$$\bar{c}_{N^{(3)}}^T = [-1 \ 2 \ 0] - [-2 \quad 0] \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0 \quad 1]$$
  Quindi $B^{(3)}$ non soddisfa le condizioni di ottimo. Ne segue che $\tilde{x}$ non è SBA ottima.
  $\hat{x}$ è una SBA non degenere, l'unico insieme di indici di base associato è $B = \{1,4\}$, da cui: $N = \{2,3,5\}$,
$$\bar{c}_N^T = [-2 \ 2 \ 0] - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1 \quad -1]$$
  Ne segue che $\hat{x}$ non è SBA ottima.

- Per la base $B^{(1)}$ si ha $\bar{c}_5 < 0$ e $\bar{A}_5 = A_B^{-1} A_5 = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} < 0$. Quindi il problema è illimitato inferiormente. Non occorre proseguire la verifica con le altre basi in quanto la condizione del Teorema 6.3 è una condizione sufficiente.

Esercizio 6.15

- Un estremo superiore s sul numero di basi (e quindi anche sul numero di SBA) della matrice *A*:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -12 & 8 & 7 \\ 3 & -5 & 9 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

  è dato dal numero di combinazioni di 5 elementi di classe 3: $\binom{5}{3} = 10$.
- Il numero s comprende anche le basi non ammissibili e le combinazioni di colonne di *A* che non danno luogo a una base. Per esempio l'insieme di indici *B*={1,2,3} non rappresenta una base in quanto $\det A_B = 0$.

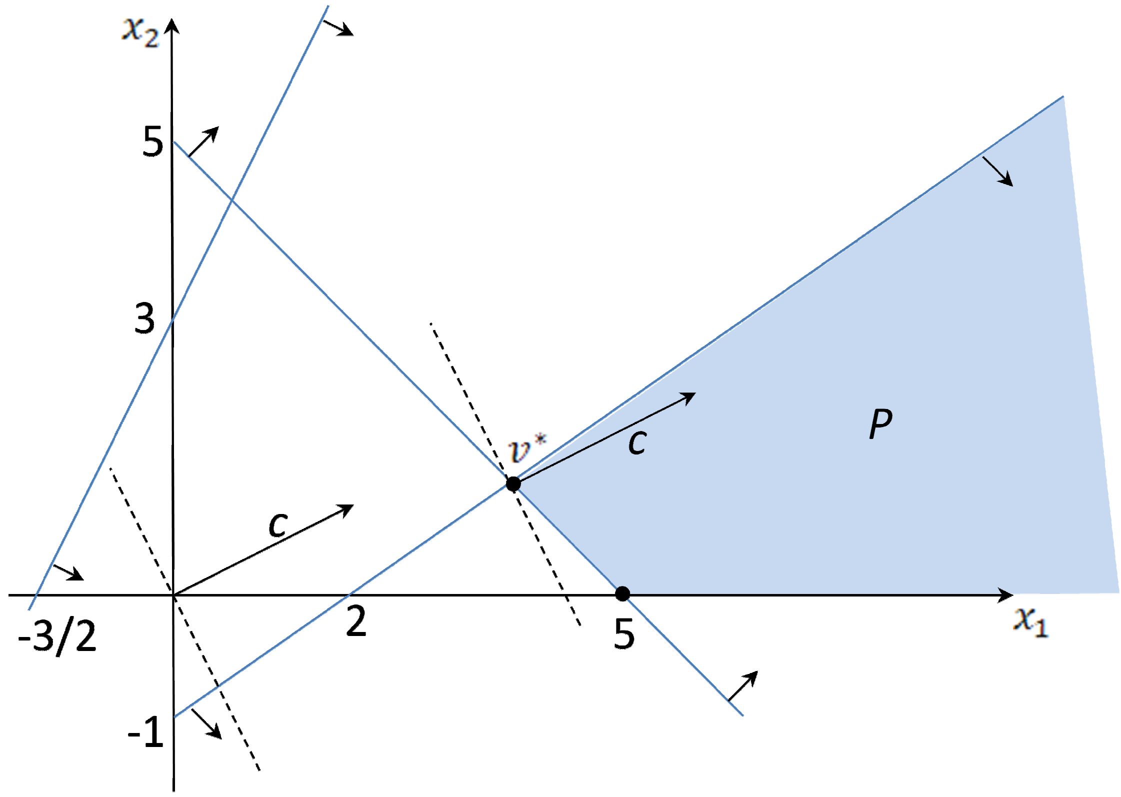

Figura 1: il Poliedro dell'esercizio 6.1

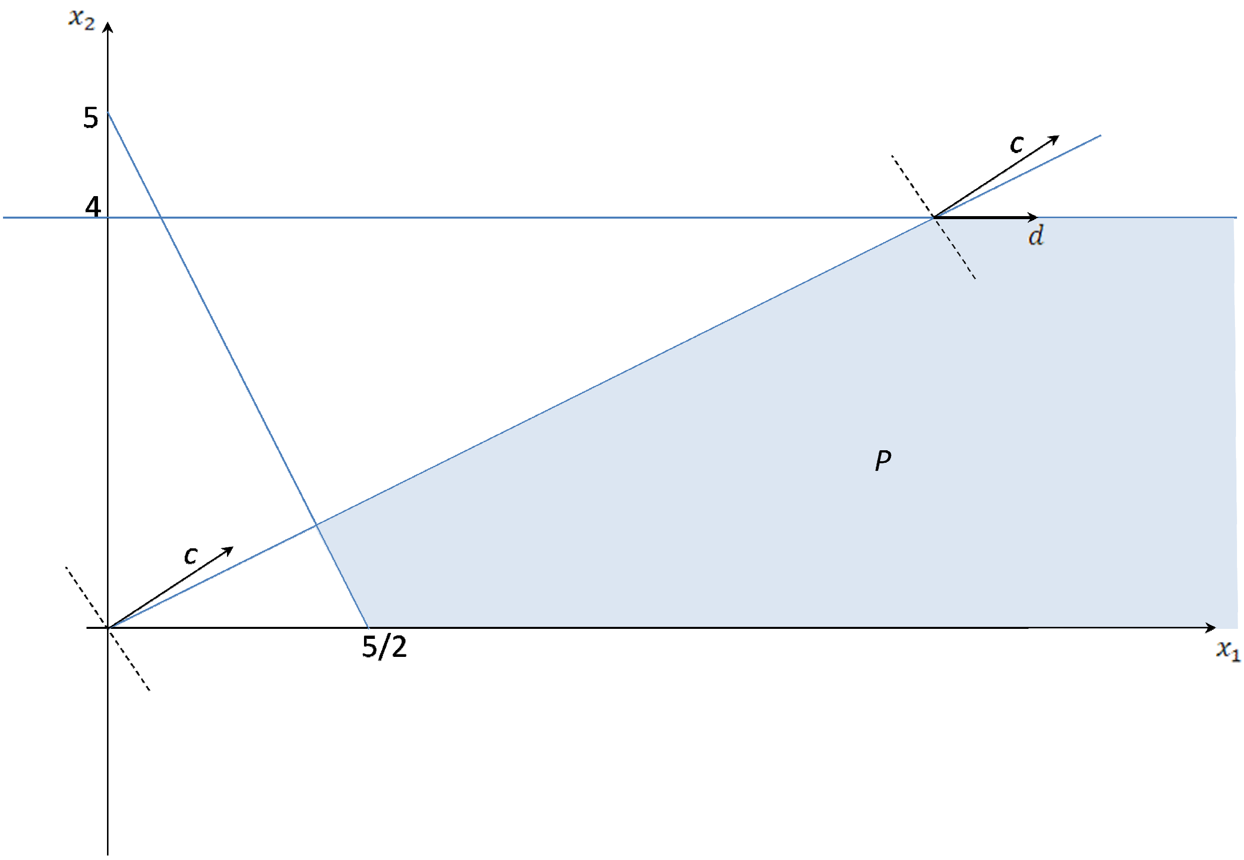

Figura 2: Il poliedro dell'esercizio 6.2

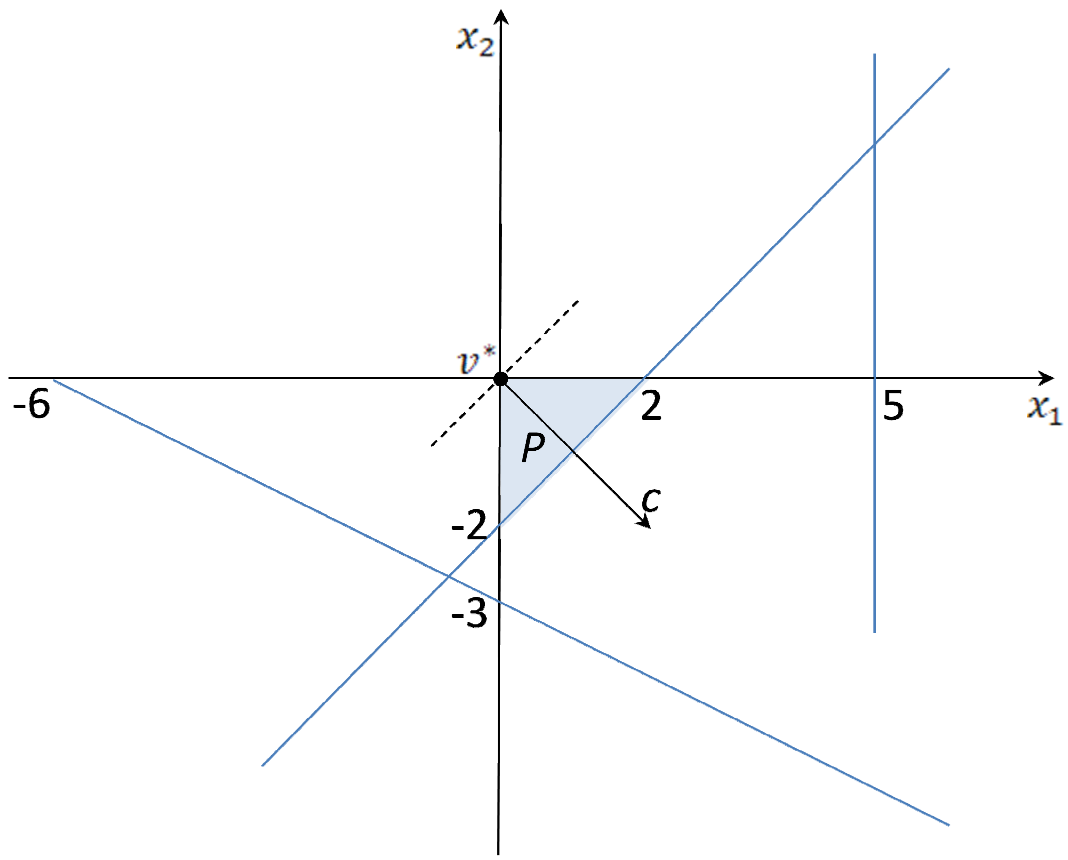

Figura 3: il poliedro dell'esercizio 6.3

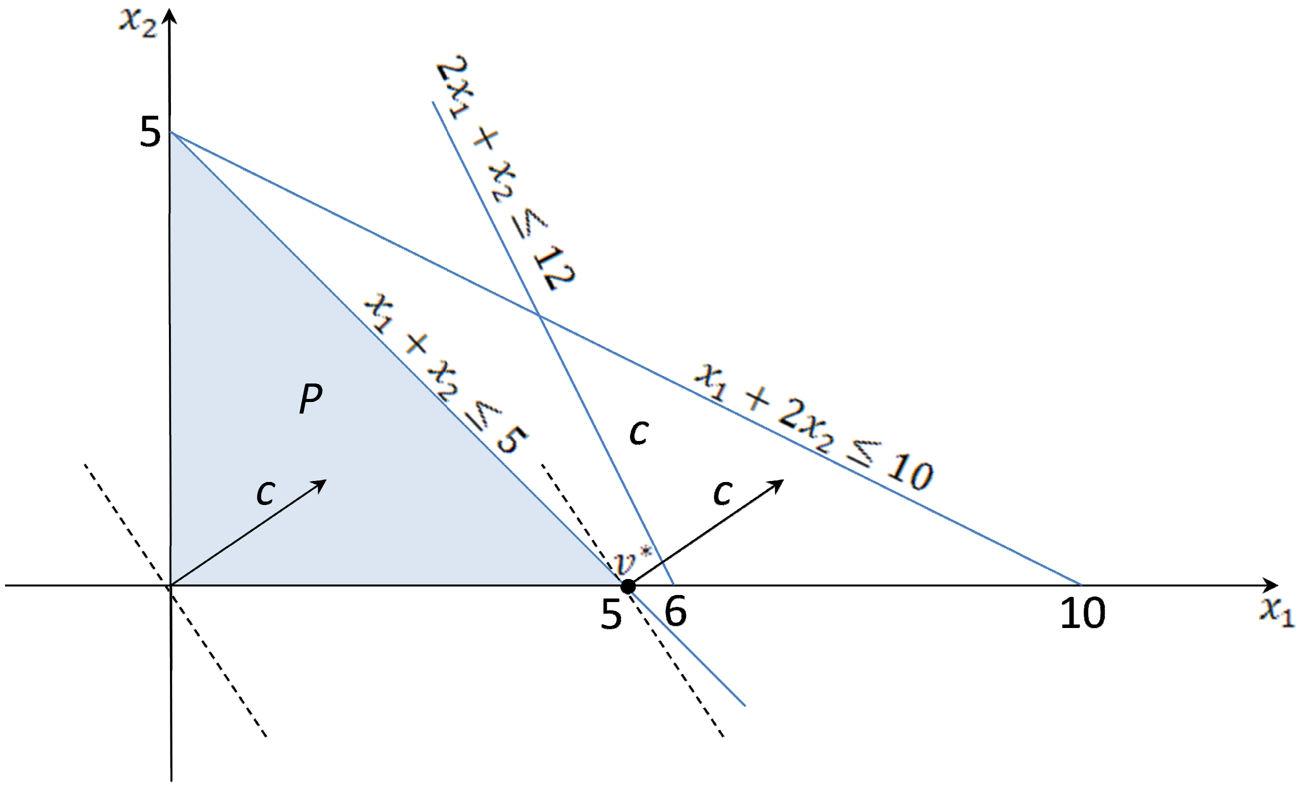

Figura 4: il poliedro dell'esercizio 6.4

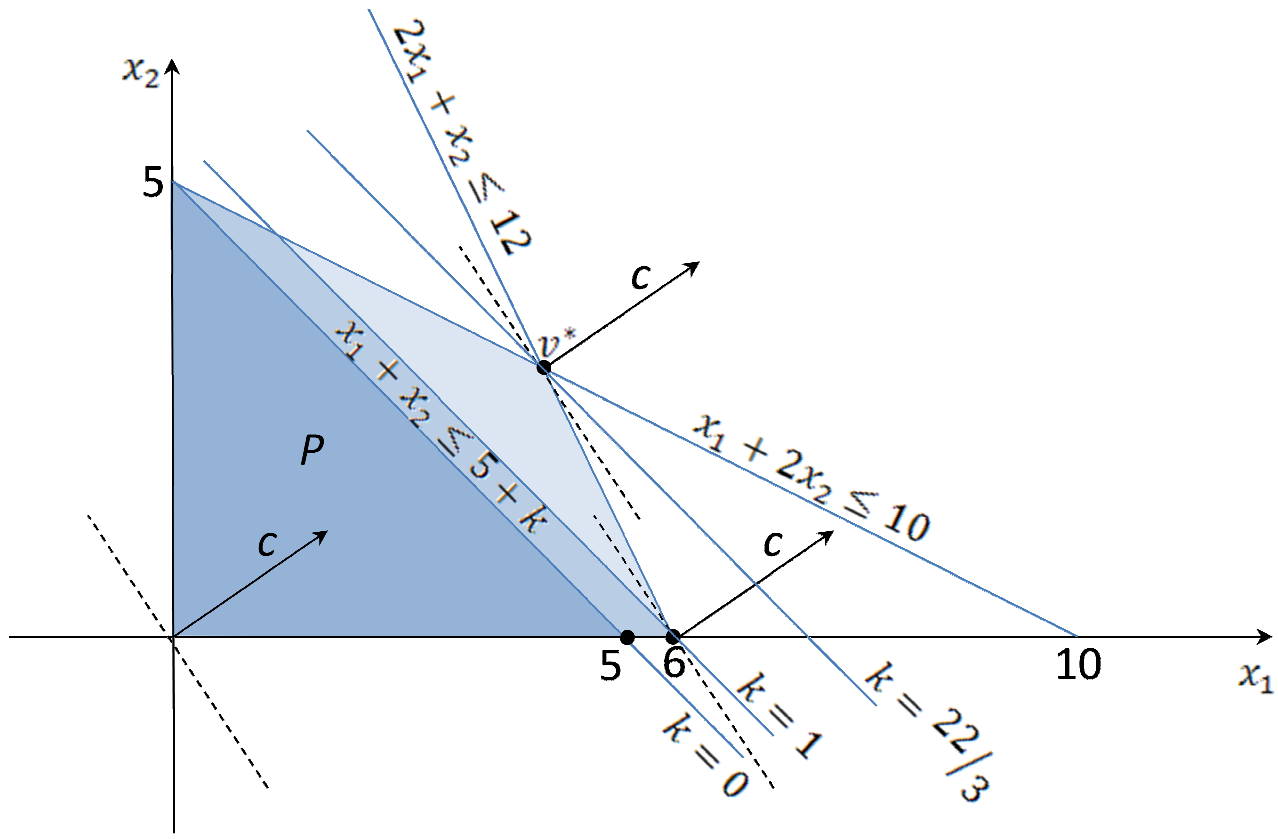

Figura 4bis: il poliedro dell'esercizio 6.4 al variare di k